Studia Philosophiae Christianae
UKSW
52(2016)4

ANDRZEJ ŁUKASIK

KWANTOWE MODELE POZNANIA I DECYZJI

Streszczenie. Mechanika kwantowa wprowadziła nowy zestaw rewolucyjnych idei, takich jak dualizm korpuskularno-falowy, superpozycja stanów, nieoznaczoność, komplementarność, splątanie i całkowicie nowe podejście do prawdopodobieństwa. Mechanika kwantowa została stworzona w celu wyjaśnienia paradoksalnych odkryć, całkowicie niemożliwych do wyjaśnienia w ramach fizyki klasycznej. Współcześnie podobną sytuację możemy znaleźć w naukach o poznaniu i teoriach decyzji – wiele odkryć wydaje się paradoksalnych z punktu widzenia klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Na przykład w pewnych warunkach ludzie szacują prawdopodobieństwo koniunkcji zdarzeń *A* i *B* jako większe niż prawdopodobieństwo z członów koniunkcji, co jest nazywane błędem koniunkcji, w innych okolicznościach oceniają prawdopodobieństwo sumy zdarzeń *A* lub *B* jako mniejsze niż prawdopodobieństwo jednego ze zdarzeń, co jest nazywane błędem dysjunkcji.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie podstawowych idei programu badawczego *Quantum Cognition*, który jest zastosowaniem abstrakcyjnego formalizmu mechaniki kwantowej do modelowania czynności poznawczych i procesów decyzyjnych. Kwantowa teoria prawdopodobieństwa, pierwotnie stworzona w celu opisania pomiaru w mechanice kwantowej, wydaje się skutecznym narzędziem w modelowaniu czynności poznawczych i procesów decyzyjnych.

Słowa kluczowe: mechanika kwantowa, *quantum cognition*, teoria decyzji, kwantowe prawdopodobieństwo

1. WSTĘP

Mechanika kwantowa jest często uważana za przysłowiowy „gwóźdź do trumny" zdrowego rozsądku. Obraz świata, jaki z niej się wyłania, jest daleki od naszych zdroworozsądkowych wyobrażeń, wysoce nieintuicyjny, pełen zagadek i paradoksów. Werner Heisenberg napisał kiedyś: „Przypominam sobie wielogodzinne, przeciągające się do późnej nocy dyskusje z Bohrem, które doprowadzały nas niemal do rozpaczy. (…) Czy przyroda może być rzeczywiście aż tak absurdalna, jak to się nam wydaje, gdy rozważamy wyniki doświadczalnych badań zjawisk atomowych?”[1]. Richard Feynman, analizując eksperyment na dwóch szczelinach, w którym elektrony trafiając na ekran zachowują się tak jak klasyczne cząstki, natomiast rozkład prawdopodobieństwa znalezienia elektronów w poszczególnych miejscach ekranu może być opisany jedynie w sposób właściwy dla fal (interferencja), określa zachowanie elektronów jako „wariackie” i twierdzi, że „nikt nie rozumie mechaniki kwantowej”[2].

Wrażenie absurdalności wynika głównie z poważnych trudności poglądowego przedstawienia sobie, jak „w rzeczywistości” przebiegają zjawiska w mikroświecie i niezgodności ich opisu z logiką klasyczną i prawami klasycznego rachunku prawdopodobieństwa. Superpozycja stanów, zgodnie z którą jeden i ten sam obiekt może znajdować się w tym samym czasie w różnych, wykluczających się nawzajem stanach, jak żywy/martwy kot Schrödingera, kwantowe splątanie, zgodnie z którym w pewnych sytuacjach własności dowolnie odległych przestrzennie obiektów pozostają ze sobą skorelowane, pomimo braku jakiegokolwiek oddziaływania między nimi (co Einstein określił jako „upiorne działanie na odległość”), czy też kwantowa nieoznaczoność i zależność rezultatów pomiarów sprzężonych obserwabli od kolejności wydają się całkowicie niezgodne z tym, jak – naszym zdaniem – rzeczy „powinny się zachowywać”.

Pomimo paradoksalnych z punktu widzenia zdrowego rozsądku rezultatów, mechanika kwantowa pozwoliła jednak wyjaśnić zjawiska, do których zastosowanie metod fizyki klasycznej okazało się nieskuteczne. Wiemy obecnie, że wprawdzie pewna klasa zjawisk w świecie makroskopowym może być poprawnie opisana prawami

1 W. Heisenberg, *Fizyka a filozofia*, tłum. z ang. S. Amsterdamski, Warszawa 1965, 23–24.
2 R.P. Feynman, *Charakter praw fizycznych*, tłum. z ang. P. Amsterdamski, Warszawa 2000, 136–137.

fizyki klasycznej, to jednak nie jest ona już uznawana za teorię fundamentalną. Zjawiska zachodzące na fundamentalnym poziomie organizacji materii mogą być opisane wyłącznie w sposób kwantowomechaniczny. Opis ten ma charakter probabilistyczny, przy czym – w odróżnieniu od praw fizyki klasycznej – pojęcie prawdopodobieństwa nie wyraża jedynie „braku wiedzy" o deterministycznych w istocie procesach, ale ma charakter nieredukowalny. Stosuje się w nim całkowicie odmienne od klasycznych sposoby obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

Wydaje się, że podobna sytuacja, jaka miała miejsce w fizyce początków dwudziestego wieku, ma miejsce we współczesnej psychologii poznawczej – w literaturze przedmiotu opisano wiele paradoksów w wydawaniu sądów i podejmowaniu decyzji, szczególnie w przypadku formułowania sądów probabilistycznych, a także działania w warunkach ryzyka i niepewności. Ludzkie sądy i decyzje często wydają się nieracjonalne – przynajmniej jeśli przyjmujemy klasyczny model racjonalności, w którym zakładamy logikę klasyczną i klasyczny rachunek prawdopodobieństwa. Możliwe jednak, że owa „nieracjonalność" jest jedynie pozorna i jest przejawem faktu, że w ludzkim myśleniu obecne są dwie warstwy, czy też dwa poziomy: poziom klasyczny, do opisu którego stosuje się logika klasyczna, i klasyczny rachunek prawdopodobieństwa oraz poziom kwantowy, czego przejawem jest obecność w formułowaniu sądów i procesach podejmowania decyzji typowo kwantowych efektów, takich jak superpozycja przekonań, zależność przekonań od kontekstu oraz efekty interferencyjne znane z kwantowego rachunku prawdopodobieństwa. Jeśli tak jest w istocie, to elementy formalizmu mechaniki kwantowej można stosować również poza fizyką – do modelowania czynności poznawczych i procesów decyzyjnych. Tak przynajmniej twierdzą twórcy programu badawczego *Quantum Cognition*, zgodnie z którym paradoksalne z klasycznego punktu widzenia ludzkie zachowania dają się skutecznie modelować przy użyciu kwantowej teorii prawdopodobieństwa.

2. PARADOKSY KLASYCZNYCH MODELI POZNANIA I DECYZJI

Zgodnie z *klasyczną teorią decyzji* racjonalny decydent powinien kierować się *zasadą użyteczności*, wybierając te opcje, które niosą mu największą korzyść, oraz *zasadą prawdopodobieństwa*, odrzucając opcje mało realne[3]. Teoria *oczekiwanej użyteczności* (*expected utility* – EU) von Neumanna i Morgensterna[4] zakłada, że racjonalna decyzja to taka, w której decydent powinien wybrać opcję, która maksymalizuje oczekiwaną użyteczność, co można wyrazić formułą[5]:

$$EU(act) = \sum_i p(E_i) \cdot u(act \mid E_i),$$

gdzie $p(E_i)$ jest prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia E_i, natomiast $u(act|E_i)$ korzyścią, jaką uzyskamy, podejmując działanie pod warunkiem, że zaszło zdarzenie E_i.

Gdyby ściśle stosować się do powyższej formuły, należałoby postępować następująco: powiedzmy, że decydent rozważa oferty pracy dwóch firm. Firma *A* oferuje podwyżkę o $u_1 = 20\%$ w ciągu pierwszego roku pracy z prawdopodobieństwem $p_1 = 0{,}3$, natomiast firma *B* oferuje podwyżkę jedynie o $u_2 = 10\%$ w ciągu pierwszego roku pracy, ale za to z prawdopodobieństwem $p_2 = 0{,}8$. Zgodnie z klasyczną teorią decyzji wyboru należałoby dokonać najpierw obliczając oczekiwaną użyteczność, czyli mnożąc odpowiednie prawdopodobieństwa przez wielkość spodziewanego zysku. Oczekiwana użyteczność w przypadku firm *A* i *B* wynosi odpowiednio:

$$EU(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$$
$$EU(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$$

3 Por. E. Nęcka, J. Orzechowski, B. Szymura, *Psychologia poznawcza*, Warszawa 2013, 572.

4 Por. J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, New Jersey 1944.

5 Por. J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, Cambridge 2014, 255.

Proste obliczenia pokazują zatem, że nieco korzystniejszy okazuje się wybór oferty firmy *B*.

Wiadomo jednak, że ludzie, podejmując decyzje, na ogół nie wykonują odpowiednich obliczeń. Przyczyny tego stanu rzeczy są rozmaite: brak czasu pozwalającego na dokładne rozważenie wszystkich możliwości i konieczność szybkiego dokonania wyboru, brak odpowiedniej wiedzy (na ogół nasza informacja o sytuacji jest niepełna) czy też ograniczoność naszych zasobów poznawczych. Ponadto w wielu przypadkach prawdopodobieństwa danego zdarzenia po prostu nie da się ściśle obliczyć, ponieważ nie mamy do czynienia ze zdarzeniami powtarzalnymi i – jak w podanym wyżej przykładzie – prawdopodobieństwo musi być szacowane intuicyjnie.

W związku z powyższym często stosowane są uproszczone schematy rozumowania, zwane *heurystykami*[6]. Stosowanie heurystyk, charakterystyczne dla wydawania sądów probabilistycznych i podejmowania decyzji w warunkach niepewności, prowadzi jednak do *tendencyjności* (*bias*) w wydawaniu sądów. Polega ona na systematycznym popełnianiu błędów określonego rodzaju, co należy odróżnić od zwykłych przypadkowych błędów, ponieważ występujące błędy mają charakter uniwersalny.

Jedną z takich heurystyk jest *heurystyka reprezentatywności*. Rozważmy ją na przykładzie gry w Lotto, w której kule z numerami od 1 do 49 losowane są z urny. Prawie nikt nie skreśli na kuponie do gry w Lotto liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, ponieważ ciąg taki wydaje się niereprezentatywny dla ciągu losowego, „nie wygląda" na losowy i wylosowanie takiego zestawu liczb wydaje się nieprawdopodobne. Jest to oczywiście złudzenie, ponieważ prawdopodobieństwo trafienia *dowolnej* szóstki liczb jest dokładnie takie samo. Według praw

6 Por. A. Tversky, D. Kahneman, *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases*, Science 185(1974), 1124–1131. Artykuł Tversky'ego i Kahnemana *Osądy w warunkach niepewności: heurystyki i błędy poznawcze* został również dołączony do pracy D. Kahneman, *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*, tłum. P. Szymczak, Poznań 2013, 559–580.

kombinatoryki liczbę sposobów, na jaki k elementów może zostać wylosowane ze zbioru n elementów (liczba kombinacji k elementów z n elementów C_n^k), opisuje następująca formuła:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Po podstawieniu: $k = 6$, $n = 49$ obliczone prawdopodobieństwo wylosowania szóstki (przy założeniu, że skreślamy tylko jeden kupon) wynosi:

$$p(A) = \frac{1}{13983816}.$$

Szansa głównej wygranej jest w przybliżeniu równa jak jeden do czternastu milionów. Wynik oczywiście nie zależy od tego, czy rozważamy układ 1, 2, 3, 4, 5, 6, czy też, powiedzmy, 7, 22, 12, 36, 49, 13 (choć ten ostatni na ogół „wydaje się bardziej przypadkowy" niż pierwszy).

Jak wspomniano, stosowanie heurystyk prowadzi do tendencyjności w wydawaniu sądów, czego przykładami są błąd koniunkcji, błąd dysjunkcji, naruszenie zasady prawdopodobieństwa całkowitego czy efekt kolejności. Opiszemy je pokrótce, a następnie pokażemy, jak występowanie tego typu efektów można wyjaśnić modelami kwantowymi.

Błąd koniunkcji (*conjunction fallacy*) polega na szacowaniu prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń $p(A \cap B)$ wyżej niż prawdopodobieństwo jednego z członów koniunkcji $p(A)$ lub $p(B)$. Paradygmatycznym przykładem jest tu *problem Lindy*, opisany przez Amosa Tversky'ego i Daniela Kahnemana[7].

---

7 Por. A. Tversky, D. Kahneman, *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases*, dz. cyt., 1124–1131; A. Tversky, D. Kahneman, *Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjuctive Fallacy in Probability Judgement*, Psychological Review 90(1984)4, 293–315; A. Łukasik, *Umysł a mechanika kwantowa. O zastosowaniu formalizmu przestrzeni Hilberta do*

Badanym przedstawiono lakoniczny opis hipotetycznej osoby o imieniu Linda następująco:

Linda jest trzydziestojednoletnią niezamężną, bezpośrednią i inteligentną kobietą. Studiowała filozofię. Jako studentka była żywo zainteresowana kwestiami dyskryminacji i sprawiedliwości społecznej. Uczestniczyła również w demonstracjach antynuklearnych[8].

Przeprowadzono badania na studentach, którzy mieli oszacować, które z poniższych zdań jest bardziej prawdopodobne:

1. Linda jest kasjerką bankową (*A*).

2. Linda jest kasjerką bankową (*A*) i aktywistką ruchu feministycznego (*B*).

Tversky i Kahneman stwierdzili, że zdecydowana większość respondentów (ponad 85% ze 142 badanych) odpowiedziała, że bardziej prawdopodobne jest to, iż Linda jest kasjerką bankową i jednocześnie aktywistką ruchu feministycznego, czyli prawdopodobieństwo iloczynu *A* i *B* oszacowali wyżej niż prawdopodobieństwo jednego z członów: $p(A \cap B) \geq p(A)$. Oszacowanie to jest oczywiście niezgodne z prawami klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, ponieważ prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń *A* i *B* nie może być większe niż prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń z osobna: $p(A \cap B) \leq p(A)$.

Według Tversky'ego i Kahnemana badani ulegli tendencyjności pod wpływem heurystyki reprezentatywności: podany opis Lindy jako osoby wykształconej, która uczestniczyła w demonstracjach antynuklearnych oraz interesowała się kwestiami dyskryminacji i sprawiedliwości społecznej sugerował, że „musi mieć coś wspólnego z feminizmem". Występowanie błędu koniunkcji stwierdzono również w wielu innych przypadkach, jak na przykład w oszacowaniu, że jest wysoce prawdopodobne, że norwescy studenci mają

---

modelowania procesów poznawczych, w: *Poszukiwania filozoficzne. I. Nauka. Prawda*, red. J. Michalczenia, J. Mizińska, K. Ossowska, Olsztyn 2014, 199–217.

8 Por. A. Tversky, D. Kahneman, *Extensional Versus Intuitive Reasoning*, dz. cyt., 298.

jasne włosy *i* niebieskie oczy[9], albo że sportowiec będący w dobrej formie wygra raczej całą serię zawodów, niż tylko jedne[10]. W każdym z tych przypadków mamy do czynienia z oceną szansy wystąpienia koniunkcji wyżej, niż jeden z członów koniunkcji.

Efekt dysjunkcji (*dysjunction effect*) został odkryty przez Tversky'ego i Eldara Sharifa podczas testowania jednej z zasad teorii decyzji, zwanej „zasadą pewności" (*sure thing principle*). Głosi ona, że jeżeli w okolicznościach *X* preferujesz *A* nad *B* i w okolicznościach przeciwnych *nie-X* preferujesz *A* nad *B*, wówczas powinieneś preferować *A* nad *B* nawet wówczas, jeśli nie znasz okoliczności[11]. Tversky i Sharif testowali tę zasadę empirycznie, proponując respondentom grę, w której każdy mógł wygrać 200$ albo przegrać 100$. Gra składała się z dwóch etapów, przy czym badani byli zobligowani do wzięcia udziału w pierwszym etapie, a następnie mieli zdecydować, czy wezmą udział w drugim. Przedstawiono trzy warianty: w pierwszym badani byli informowani, że wygrali pierwszą grę, w drugim byli informowani o przegranej, w trzecim zaś nie podawano informacji na temat wyniku pierwszej gry. Osoby, które poinformowano, że wygrały pierwszą grę, w większości przypadków chciały zagrać jeszcze raz (69%), osoby, które poinformowano o przegranej, również w większości przypadków chciały powtórzyć grę (59%), natomiast osoby, którym nie udzielono informacji na temat rezultatu pierwszej gry, jedynie w 36% przypadków chciały grę powtórzyć. Skoro jednak większość badanych podejmowała decyzję o powtórzeniu gry zarówno w przypadku wygranej (okoliczności *X*), jak i w przypadku przegranej (okoliczności *nie-X*), to powinni oni preferować decyzję o kontynuacji gry bez względu na okoliczności, to znaczy również wówczas, gdy nie wiedzieli, czy wystąpiły okoliczności *X*, czy też okoliczności *nie-X*. Badania jednak pokazały, że w przypadku

---

9 Por. J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, dz. cyt., 118.

10 Por. E. Nęcka, J. Orzechowski, B. Szymura, *Psychologia poznawcza*, dz. cyt., 554.

11 Por. J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, dz. cyt., 8.

nieznajomości rezultatu zdecydowana mniejszość studentów postanowiła kontynuować grę.

Efekt kolejności (*order effect*) polega na tym, że udzielane odpowiedzi zależą od kolejności, w jakiej zadaje się pytania, a zatem również od kontekstu. Rozważymy go na konkretnym przykładzie dotyczącym badania opinii publicznej w wyborach prezydenckich[12]. Instytut Gallupa w 1997 r. przeprowadził badania ponad 1000 osób, które miały odpowiedzieć na pytanie, czy kandydat jest uczciwy i godny zaufania. Porównywano opinie na temat Billa Clintona i Ala Gore'a. Połowa z badanych miała odpowiedzieć na to pytanie najpierw w odniesieniu do Clintona, a następnie w odniesieniu do Gore'a, natomiast drugiej połowie badanych zadano pytania w odwrotnej kolejności. W przypadku, gdy badani wypowiadali się na temat jednego kandydata bez porównywania go z drugim kandydatem, Clinton uzyskał 50% głosów, natomiast Gore 68%. W przypadku, gdy kontekstem do oceny jednego kandydata była uprzednia ocena drugiego pozytywna ocena Clintona wzrosła do 57% głosów, natomiast pozytywna ocena Gore'a zmalała do 60%.

Tendencyjność w wydawaniu sądów probabilistycznych wydaje się świadczyć o niepełnej (czy też ograniczonej) racjonalności człowieka. Klasyczny model decyzji ma jednak charakter preskryptywny raczej niż deskryptywny – podaje pewien „idealny wzorzec" postępowania, a nie relacjonuje, jak faktycznie ludzie wydają sądy i podejmują decyzje. Z punktu widzenia klasycznej teorii decyzji ludzie stosując heurystyki zachowują się nieracjonalnie. Jeżeli jednak przyjmiemy ewolucyjne kryterium racjonalności, to znaczy za racjonalne uznamy „to, co zwiększa nasze szanse w zmaganiach z wyzwaniami stawianymi przez środowisko, a nie to, co wynika z abstrakcyjnych reguł wnioskowania i podejmowania decyzji"[13], to stosowanie heu-

---

12 Por. Z. Wang, J.R. Busemeyer, *A Quantum Question Order Model Suported by Empirical Tests of an* A *Priori and Precise Prediction*, Topics in Cognitive Science 5(2013)4, 692.

13 E. Nęcka, J. Orzechowski, B. Szymura, *Psychologia poznawcza*, dz. cyt., 588.

rystyk wypadałoby uznać za racjonalne, choć niezgodne z pewnym teoretycznym wzorcem.

Możliwe jest jeszcze jedno rozwiązanie – być może nasze dotychczasowe kryteria racjonalności pomijają fakt, że w procesach poznawczych występują pewne efekty analogiczne do efektów charakterystycznych dla mechaniki kwantowej – superpozycja stanów (rozumianych w tym przypadku jako przekonania), interferencja prawdopodobieństw i zależność przekonań od kontekstu (efekt kolejności).

3. KWANTOWE MODELOWANIE SĄDÓW PROBABILISTYCZNYCH

Mniej więcej w tym samym czasie, gdy powstała mechanika kwantowa, sformułowano dwie różne teorie prawdopodobieństwa – klasyczną, której autorem jest Andriej Kołmogorow[14], i kwantową, która jest dziełem Johna von Neumanna[15].

W aksjomatyzacji Kołmogorowa prawdopodobieństwo zdarzenia $E \subseteq \Omega$ (gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych) jest funkcją o wartościach w przedziale [0, 1], spełniającą następujące aksjomaty[16]:

1. $0 \leq p(E) \leq 1$.
2. Jeśli zdarzenia A i B wykluczają się parami (tzn. $A \cap B = \emptyset$), to prawdopodobieństwo sumy zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
3. $p(\Omega) = 1$. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności.

14 A. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, New York 1933.
15 J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Princeton 1932.
16 A. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, dz. cyt., 2.

W kwantowej teorii prawdopodobieństwa podstawową rolę odgrywa przestrzeń Hilberta H[17]. Jest to liniowa przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb zespolonych. W notacji Diraca elementy tej przestrzeni, czyli wektory, oznaczamy symbolem $|\ \rangle$ (czytaj „ket" – jest to część angielskiego terminu oznaczającego nawias – *bracket*)[18]. Symbol „bra" $\langle\ |$ oznacza sprzężenie zespolone do keta $|\ \rangle$. Przestrzeń liniowa V jest to zbiór ketów, dla których zdefiniowana jest suma wektorów oraz mnożenie wektora przez skalar, przy czym spełnione są następujące aksjomaty: jeżeli $|v\rangle$, $|w\rangle \in V$ oraz $a, b \in C$ (gdzie C jest zbiorem liczb zespolonych), to:

1. $|v\rangle + |w\rangle \in V$, $a|v\rangle \in V$.
2. $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$.
3. $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.
4. $a(b|v\rangle) = ab|v\rangle$.
5. $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$.
6. $|v\rangle + (|w\rangle + |u\rangle) = (|w\rangle + |v\rangle) + |u\rangle$.
7. $|v\rangle + |0\rangle = |v\rangle$.
8. $|v\rangle + |-v\rangle = |0\rangle$.

---

17 Por. Z. Wang, J.R. Busemeyer, H. Atmanspacher, E.M. Potos, *The Potential of Using Quantum Theory to Build Models of Cognition*, Topics in Cognitive Sciences 5(2013), 685–686; J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, dz. cyt., 89.

18 P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1947.

W teorii kwantowej, obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia, wykorzystujemy iloczyn skalarny ketów $\langle v|w\rangle$, który jest liczbą zespoloną, spełniającą następujące aksjomaty:

1. $\langle v|v\rangle \geq 0$. $\langle v|v\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|v\rangle = |0\rangle$.

2. $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$.

3. $\langle v|(a|w\rangle + b|u\rangle) = a\langle v|w\rangle + b\langle v|u\rangle$.

Jeżeli $\langle v|w\rangle = 0$, to wektory $|v\rangle$ i $|w\rangle$ nazywamy *ortogonalnymi*.

Normą wektora nazywamy wyrażenie:

$$|v| = \sqrt{\langle v|v\rangle}\ .$$

Jeżeli $|v| = 1$, to wektor taki nazywamy *unormowanym*.

W teorii klasycznej zdarzenia są reprezentowane przez *podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych*, natomiast w teorii kwantowej zdarzenia są reprezentowane przez *podprzestrzenie przestrzeni Hilberta*. W skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta zbiór ketów $\{|i\rangle, i = 1,\ldots,N\}$ stanowi ortonormalną[19] bazę i każdy ket może być przedstawiony jako kombinacja liniowa wektorów bazy:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i|i\rangle,$$

gdzie współczynniki v_i są składowymi wektora w tej bazie.

Jeżeli zdarzenia A i B są reprezentowane przez podprzestrzenie V_A i V_B przestrzeni Hilberta, to koniunkcji zdarzeń A i B odpowiada podprzestrzeń rozpięta nad $V_A \cap V_B$, alternatywie zdarzeń A lub B odpowiada podprzestrzeń rozpięta nad $V_A \cup V_B$, natomiast zdarzeniu

19 To znaczy, że wektory bazy są unormowane do jedności i parami ortogonalne.

przeciwnemu do *A*, czyli zdarzeniu *nie-A*, odpowiada podprzestrzeń ortogonalna do V_A.

Zastosowanie kwantowej teorii prawdopodobieństwa do modelowania czynności poznawczych i procesów decyzyjnych wiąże się z przyjęciem kilku postulatów dotyczących przekonań, które wzorowane są na postulatach mechaniki kwantowej[20].

Przekonanie osoby na dany temat jest reprezentowane przez unormowany do jedności wektor z zespolonej *N*-wymiarowej przestrzeni Hilberta $|\Psi\rangle$. Każdemu wymiarowi przestrzeni odpowiada wektor bazy $|i\rangle$, reprezentujący niepowtarzalny zbiór cech i ich wartości, służących do charakterystyki sytuacji, której dotyczy pytanie. W paradygmacie Lindy mogą to być na przykład „starsza kobieta, feministka, zamężna…" albo „młoda kobieta, nie feministka, niezamężna…". Jeżeli mamy *m* cech, z których każda może mieć *n* wartości, wówczas przestrzeń ma $N = m^n$ wymiarów[21]. W tej samej przestrzeni Hilberta wektor stanu $|\Psi\rangle$ możemy zapisać w różnych bazach, reprezentujących różne zbiory cech i ich wartości.

Ustalenie się przekonania na dany temat albo podjęcie decyzji może być opisane jako rzutowanie wektora stanu $|\Psi\rangle$ na odpowiednią podprzestrzeń przestrzeni Hilberta. Z każdą podprzestrzenią związany jest *operator rzutowy* P_A, który rzutuje wektor stanu $|\Psi\rangle$ na podprzestrzeń reprezentującą zdarzenie.

Działanie operatora rzutowego $P_i = |i\rangle\langle i|$ na dowolny ket $|\Psi\rangle$ polega wydzieleniu jego części skierowanej w kierunku $|i\rangle$:

$$P_i|\Psi\rangle = |i\rangle\langle i|\Psi\rangle .$$

Operatory rzutowe odpowiadają *pytaniom elementarnym*, na które można uzyskać tylko odpowiedź „tak" albo „nie"[22]. Operator rzu-

20 Por. J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, dz. cyt., 117.

21 Por. tamże, 122.

22 Por. I. Białynicki-Birula, Z. Białynicka-Birula, *Elektrodynamika kwantowa*, Warszawa 1974, 16.

towy jest hermitowski, czyli $P^{\dagger} = P$, i idempotentny: $P^2 = P$. Ostatnia własność oznacza, że ponowne rzutowanie na ten sam wektor bazy nie zmienia już postaci wektora:

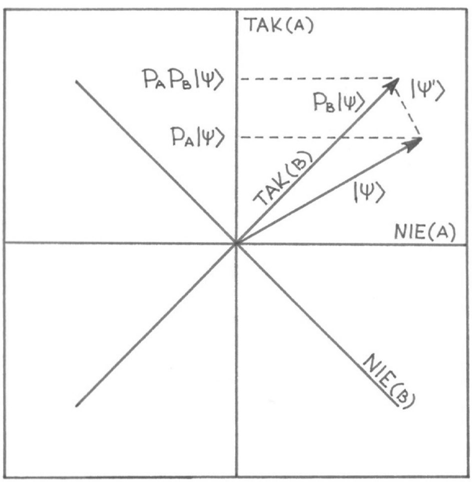
$$P_i P_i = |i\rangle\langle i||i\rangle\langle i| = \langle i|i\rangle|i\rangle\langle i| = |i\rangle\langle i| = P_i .$$

Operatorem jednostkowym nazywamy operator:

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i| .$$

Jest on równy sumie operatorów rzutujących na całą przestrzeń Hilberta:

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_i P_i .$$



Rys. 1: Geometryczne podejście do prawdopodobieństwa. Wektor stanu $|\Psi\rangle$ reprezentuje przekonanie osoby na dany temat. W tej samej przestrzeni Hilberta możemy wybrać dwie bazy *A* i *B* reprezentujące pozytywne (tak) lub negatywne (nie) odpowiedzi na pytania *A* lub *B*. Odpowiedzi na pytanie odpowiada rzutowanie wektora $|\Psi\rangle$ na odpowiedni kierunek w przestrzeni Hilberta. Prawdopodobieństwo uzyskania odpowiedzi jest równe kwadratowi długości rzutu wektora. Rzutowanie bezpośrednio na kierunek *A* daje inny rezultat, niż rzutowanie na kierunek *A* pod warunkiem, że uprzednio dokonano rzutowania na kierunek *B* (efekt kolejności).

Operator I rzutujący na całą przestrzeń Hilberta reprezentuje pytanie, na które odpowiedź zawsze brzmi „tak".

Operator $I - P$ reprezentuje zaprzeczenie pytania P.

Jeśli odpowiedź „tak" na pytanie pierwsze zawsze pociąga za sobą odpowiedź „tak" na pytanie drugie, to podprzestrzeń, na którą rzutuje P_1, jest zawarta w podprzestrzeni, na którą rzutuje P_2.

Pytanie reprezentowane przez połączenie pytań spójnikiem „i" reprezentowane jest przez iloczyn operatorów rzutowych $P_2 P_1$ (pod warunkiem, że jest on operatorem rzutowania).

Pytanie reprezentowane przez połączenie pytań spójnikiem „lub" reprezentowane jest przez sumę operatorów rzutowych $P_1 + P_2$ (pod warunkiem, że jest on operatorem rzutowania).

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe kwadratowi rzutu wektora stanu na podprzestrzeń reprezentującą to (twierdzenie Gleasona)[23]:

$$p(A) = \left| P_A \middle| \Psi \right\rangle \Big|^2 = \left\langle \Psi \middle| P_A P_A \middle| \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi \middle| P_A \middle| \Psi \right\rangle .$$

Po rzutowaniu wektora stanu $|\Psi\rangle$ na daną podprzestrzeń otrzymujemy nowy wektor stanu $P_1|\Psi\rangle$. Ponieważ rzut wektora ma mniejszą długość niż ten wektor, należy nowy wektor unormować tak, aby miał długość jednostkową (prawdopodobieństwo odpowiedzi na wszystkie pytania musi sumować się do jedności):

$$|\Psi_1\rangle = \frac{P_1|\Psi\rangle}{\left|P_1|\Psi\rangle\right|} .$$

Nowy wektor stanu może być następnie użyty do oszacowania prawdopodobieństwa odpowiedzi na następne pytanie.

23 Por. A. M. Gleason, *Measures on the Closed Subspaces of* a *Hilbert Space*, Journal of Mathematical Mechanics 6(1957), 885–893 (http://www.iap.tu-darmstadt.de/tqp/uebungen/qinfo11/Gleason.pdf).

Analogicznie do klasycznej definicji prawdopodobieństwa aksjomaty definicji kwantowej można zapisać następująco:

1. $0 \leq p(A) = \left| P_A \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 \leq 1$.

2. Jeśli zdarzenia A i B wykluczają się parami (tzn. $A \cap B = 0$), to: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

3. $p(H) = 1$. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności.

Formalnie aksjomatyzacja von Neumanna bardzo przypomina aksjomatyzację Kołmogorowa, lecz zastosowanie operatorów rzutowych i kwantowomechaniczny sposób obliczania prawdopodobieństwa prowadzą do głębokich różnic między podejściem klasycznym a kwantowym.

Przede wszystkim pomiary (lub odpowiedzi na pytania) reprezentowane przez operatory nie zawsze są przemienne. W mechanice kwantowej definiuje się wielkość, zwaną *komutatorem*:

$$[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$$

Jeżeli $P_1P_2 - P_2P_1 = 0$, to mówimy, że operatory takie *komutują ze sobą* (są przemienne). Wówczas kolejność działania tych operatorów nie ma znaczenia: $P_1P_2 = P_2P_1$. Operatory takie posiadają wspólną bazę wektorów własnych i reprezentowane przez nie pytania są kompatybilne. Jeżeli $P_1P_2 - P_2P_1 \neq 0$, to operatory takie *nie komutują ze sobą* (nie są przemienne – nie posiadają wspólnej bazy wektorów własnych). Wtedy $P_1P_2 \neq P_2P_1$ i rezultat działania na dowolny wektor stanu zależy od kolejności. W mechanice kwantowej fakt ten uwidacznia się w zasadzie nieoznaczoności Heisenberga: istnieją pary wielkości fizycznych, zwane sprzężonymi (np. składowa pędu cząstki elementarnej i odpowiadająca jej składowa położenia), których jednoczesny pomiar z dowolną dokładnością jest z przyczyn zasadniczych niemożliwy. W takim wypadku kolejność wykonywania pomiarów ma istotne znaczenie.

Podobne efekty można stwierdzić w wydawaniu sądów i podejmowaniu decyzji[24]. Nasze przekonania często zależą od kontekstu – odpowiedzi na pytania reprezentowane przez operator P_1 a następnie na pytanie reprezentowane przez operator P_2 mogą dawać różne rezultaty, jeśli operatory te nie komutują ze sobą i reprezentują niekompatybilne pytania.

Co więcej, w przypadku gdy operatory nie komutują ze sobą, nie można, ściśle rzecz biorąc, zdefiniować koniunkcji zdarzeń, ale jedynie sekwencję zdarzeń[25]. W podanym przykładzie ilustrującym efekt koniunkcji, jeżeli na podstawie opisu nabraliśmy przekonania, że Linda jest feministką, wówczas reprezentujemy ten stan rzeczy jako rzutowanie wektora stanu $|\Psi\rangle$ na kierunek *B*: $P_B|\Psi\rangle = |\Psi_B\rangle$. Prawdopodobieństwo otrzymania rezultatu *B*: $P(B) = \left|P_B|\Psi\rangle\right|^2$. Jeżeli *następnie* pytamy, czy Linda jest kasjerką bankową, to pozytywną odpowiedź reprezentujemy jako rzutowanie unormowanego wektora stanu $|\Psi_B\rangle$ na kierunek *A*. Sytuację możemy zapisać następująco: $P_A P_B|\Psi_B\rangle$. Gdybyśmy zadali tylko pytanie, czy Linda jest kasjerką bankową (to znaczy bez *wcześniejszego* pytania o to, czy jest feministką), wówczas pozytywna odpowiedź byłaby reprezentowana jako rzutowanie wektora stanu $|\Psi\rangle$ bezpośrednio na kierunek *A*: $P_A|\Psi\rangle$. Biorąc pod uwagę fakt, że kolejność zachodzących tu „pomiarów kognitywnych" ma istotne znaczenie, może zdarzyć się, że:

$$p(B, A) = \left|P_A P_B \Psi\right|^2 \geq p(A).$$

---

24 Por. D. Aerts, L. Gabora, S. Sozzo, T. Veloz, *Quantum Structure in Cognition: Fundamentals and Applications*, arXiv:1104.3344v1 [cs.AI] 17 Apr 2011; D. Aerts, S. Sozzo, *Quantum Interference in Cognition: Structural Aspect of the Brain*, arXiv:1204.4914v1 [cs:AI] 22 Apr 2012.

25 Por. J.R. Busemeyer, P. Bruza, *Quantum Models in Cognition and Decision*, dz. cyt., 121.

Ponieważ dla niekompatybilnych pytań nie możemy reprezentować przekonania na temat koniunkcji $A \cap B$, lecz jedynie sekwencję przekonań „*A*, następnie *B*”, być może właściwsze byłoby mówienie o „efekcie koniunkcji” niż o „błędzie koniunkcji”. Zastosowane podejście pozwala adekwatnie modelować wyniki badań psychologicznych, jeśli przyjmiemy, że kolejność ustalania się przekonań ma istotne znaczenie, podobnie jak kolejność pomiarów w mechanice kwantowej. Nasze przekonania zależą w wielu przypadkach od kontekstu i rezultaty „pomiarów kognitywnych” zależą od kolejności, analogicznie do sytuacji poznawczej w mechanice kwantowej. Podejście to nie wyklucza oczywiście istnienia przekonań ustalonych i niezależnych od kontekstu.

Poza efektem kolejności cechą charakterystyczną odróżniającą kwantowe prawdopodobieństwo od klasycznego są efekty interferencyjne i związane z nimi naruszenie prawa prawdopodobieństwa całkowitego. W celu ilustracji tego stanu rzeczy rozważmy dwa przypadki[26]. W pierwszym po prostu obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *B*. W drugim najpierw stwierdzamy, czy zachodzi zdarzenie *A*, czy też *nie-A*, a następnie obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia *B*.

W pierwszym przypadku prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *B* wynosi:

$$p(B) = \left| P_B \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 .$$

W przypadku drugim możemy zaobserwować najpierw zdarzenie *A*, a następnie zdarzenie *B* z prawdopodobieństwem

$$p(A,B) = \left| P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 ,$$

26 Por. tamże, 93n.

albo najpierw zdarzenie $\overline{A}$, a następnie zdarzenie B z prawdopodobieństwem

$$p(\overline{A}, B) = \left| P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 .$$

Całkowite prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi:

$$p_T(B) = P(A,B) + P(\overline{A}, B) = \left| P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 + \left| P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 .$$

W mechanice kwantowej pojawiają się jednak efekty interferencyjne, co sprawia, że prawdopodobieństwo zdarzenia B nie jest równe sumie prawdopodobieństw, jak to ma miejsce we wzorze na prawdopodobieństwo całkowite. Wykorzystując własności operatorów rzutowych, prawdopodobieństwo zdarzenia B możemy zapisać następująco:

$$p(B) = \left| P_B \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 = \left| P_B I \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 = \left| P_B (P_A + P_{\overline{A}}) \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 =$$

$$\left\langle \Psi \middle| (P_A + P_{\overline{A}}) P_B P_B (P_A + P_{\overline{A}}) \middle| \Psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \Psi \middle| P_A P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| P_{\overline{A}} P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \Psi \middle| P_A P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| P_{\overline{A}} P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle =$$

$$= \left| P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 + \left| P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle \right|^2 + \left\langle \Psi \middle| P_A P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| P_{\overline{A}} P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle =$$

$$= p_T(B) + Int(B) .$$

Wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia B różni się od wzoru na prawdopodobieństwo całkowite o *człon interferencyjny*

$$Int(B) = \left\langle \Psi \middle| P_A P_B P_{\overline{A}} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| P_{\overline{A}} P_B P_A \middle| \Psi \right\rangle ,$$

który możemy zapisać następująco:

$$Int(B) = \langle \Psi | P_A P_B P_{\overline{A}} | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\overline{A}} P_B P_A | \Psi \rangle =$$

$$= \langle \Psi | P_{\overline{A}} P_B P_A | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\overline{A}} P_B P_A | \Psi \rangle^* =$$

$$= 2 \, | \langle \Psi | P_{\overline{A}} P_B P_A | \Psi \rangle | \cos \vartheta \, ,$$

gdzie ϑ jest kątem fazowym w iloczynie skalarnym $\langle \Psi | P_{\overline{A}} P_B P_A | \Psi \rangle$[27].

Jeżeli operatory rzutowe odpowiadające pomiarom *A* i *B* komutują ze sobą, czyli zdarzenia *A* i *B* są kompatybilne, wówczas człon interferencyjny znika: $P_{\overline{A}} P_B P_A = P_{\overline{A}} P_A P_B = 0$ (rzutowanie na podprzestrzeń *A*, a następnie na jej ortogonalne dopełnienie $\overline{A}$ daje oczywiście zero: $P_{\overline{A}} P_A = 0$) i prawdopodobieństwo zdarzenia *B* jest takie samo, jak w przypadku klasycznym. Dla zmiennych niezgodnych pojawia się jednak człon interferencyjny, który może mieć wartość dodatnią albo ujemną, co sprawia, że kwantowe prawdopodobieństwo różni się od klasycznego prawdopodobieństwa całkowitego $p_T(B)$:

$$p(B) = p_T(B) + Int(B) \, .$$

W przypadku operatorów komutujących ze sobą odpowiednie wzory kwantowego rachunku prawdopodobieństwa redukują się do klasycznych, co oznacza, że kwantowa teoria prawdopodobieństwa jest ogólniejsza od teorii klasycznej i zawiera ją jako przypadek szczególny.

4. PODSUMOWANIE

Podstawowa teza sformułowana w ramach programu badawczego *Quantum Cognition* głosi, że w procesach wydawania sądów i podejmowania decyzji można stwierdzić występowanie efektów typowych

---

27 Sumę liczby zespolonej i jej sprzężenie zespolonego można w postaci trygonometrycznej zapisać jako: $z + z^* = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) + |z|(\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = 2|z| \cos \vartheta$.

dla mechaniki kwantowej – superpozycję przekonań, efekt kolejności i zależność przekonań od kontekstu oraz efekty interferencyjne w szacowaniu prawdopodobieństw zdarzeń. Efekty te, całkowicie niezrozumiałe z klasycznego punktu widzenia, mogą być jednak adekwatnie modelowane dzięki zastosowaniu kwantowej teorii prawdopodobieństwa. Podejście kwantowe w modelowaniu czynności poznawczych i procesów decyzyjnych okazuje się w wielu przypadkach ogólniejsze od klasycznego a jednocześnie daje wyniki takie same jak podejście klasyczne w przypadku pytań zgodnych, reprezentowanych przez przemienne operatory.

Można oczywiście postawić zarzut, że mechanika kwantowa z właściwymi sobie osobliwościami opisu zjawisk fizycznych dotyczy *wyłącznie* świata atomów i cząstek elementarnych, w którym rozpatrywane obiekty są co najmniej dziesięć rzędów wielkości mniejsze niż podmiot poznający, jakim jest człowiek należący do świata makroskopowego, zatem przenoszenie jej pojęć i metod z dziedziny, w której zostały stworzone na zupełnie inny obszar jest nieprawomocne. Nie w tym jednak rzecz, aby aparaturę pojęciową wypracowaną w pewnej dziedzinie bezkrytycznie stosować w innej dziedzinie, dotyczącej całkowicie innej skali zjawisk. Program badawczy, którego jedynie zarys przedstawiony został w niniejszym artykule, nie jest po prostu zastosowaniem aparatu pojęciowego mechaniki kwantowej do modelowania czynności poznawczych i procesów decyzyjnych, lecz polega na konstruowaniu modeli *inspirowanych* elementami formalizmu matematycznego mechaniki kwantowej (teorią przestrzeni Hilberta i kwantowym rachunkiem prawdopodobieństwa) w kognitywistyce, a także w sztucznej inteligencji i w przetwarzaniu informacji[28]. Warto przy tym przypomnieć, że jedna z fundamentalnych zasad kopenhaskiej interpretacji mechaniki kwantowej, a mianowicie zasada komplementarności Bohra, zaczerpnięta została spoza fizyki,

28 D. Aerts, L. Gabora, S. Sozzo, T. Veloz, *Quantum Structure in Cognition: Fundamentals and Applications*, arXiv:1104.3344v1 [cs.AI] 17 Apr 2011.

a mianowicie z pracy Williama Jamesa *The Principles of Psychology*[29], zaś podziały na różne dyscypliny naukowe, wobec rosnącej interdyscyplinarności badań, mają współcześnie raczej bardziej charakter administracyjny, niż merytoryczny.

Warto również zwrócić uwagę na fakt, że mechanika kwantowa jest powszechnie uznawana za najdoskonalszą i najdokładniejszą teorię w historii nauki i – w odróżnieniu od mechaniki klasycznej – nie ma granic stosowalności, a przynajmniej granice takie nie są obecnie znane. W kosmologii kwantowej na przykład mówi się o funkcji falowej Wszechświata, co znaczy, że aparatura pojęciowa mechaniki kwantowej z powodzeniem stosowana jest nie tylko do opisu elementarnych składników materii, ale także do opisu największych układów, jakie znamy. Jeżeli pewne układy makroskopowe, włącznie z podmiotami poznającymi, mogą być opisane prawami fizyki klasycznej, to jednak opis taki zawsze ma charakter przybliżony, ponieważ sama fizyka klasyczna jest teorią przybliżoną. W fizyce powszechnie przyjmuje się założenie jedności przyrody, to znaczy założenie, że takie same prawa obowiązują w całym Wszechświecie. Podział praw na „klasyczne" i „kwantowe" nie może mieć charakteru fundamentalnego, ponieważ oznaczałoby to powrót do dawno już przezwyciężonego obrazu świata Arystotelesa, zgodnie z którym zupełnie inne prawa obowiązują w świecie podksiężycowym, a zupełnie inne w świecie nadksiężycowym. Przy założeniu jedności przyrody i fundamentalnego charakteru mechaniki kwantowej, zastosowanie jej metod również w dziedzinie kognitywistyki wydaje się obiecujące, chociaż – trzeba przyznać – jest obecnie niezmiernie rzadko wykorzystywane. Na przykład na XI Zjeździe Polskiego Towarzystwa Kognitywistycznego (Białystok, 22–24 września 2016 r.) żaden z wygłoszonych referatów nie dotyczył omawianego tu zagadnienia. Również w wydanym w 2016 roku *Przewodniku po kognitywistyce*[30] żaden z tekstów nie wspomina nawet

---

29 Por. W. James, *The Principles of Psychology*, New York 1890, 206.

30 *Przewodnik po kognitywistyce*, red. J. Brehmer, Kraków 2016.

o programie *Quantum Cognition*. Jest to nowy program badawczy, który nie ma jeszcze dobrze udokumentowanych zastosowań praktycznych, ale – jak się wydaje – daje interesujące perspektywy.

BIBLIOGRAFIA

Aerts D., Gabora L., Sozzo S., Veloz T., *Quantum Structure in Cognition: Fundamentals and Applications*, arXiv:1104.3344v1 [cs.AI] 17 Apr 2011.

Aerts D., Sozzo S., *Quantum Interference in Cognition: Structural Aspect of the Brain*, arXiv:1204.4914v1 [cs:AI] 22 Apr 2012.

Białynicki-Birula I., Białynicka-Birula Z., *Elektrodynamika kwantowa*, PWN, Warszawa 1974.

Busemeyer J.R., Bruza P., *Quantum Models in Cognition and Decision*, Cambridge University Press, Cambridge 2014.

Dirac P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford at the Clarendon Press, Oxford 1947.

Feynman R.P., *Charakter praw fizycznych*, tłum. z ang. P. Amsterdamski, Prószyński i S-ka, Warszawa 2000.

Gleason A.M., *Measures on the Closed Subspaces of* a *Hilbert Space*, Journal of Mathematical Mechanics (1957)6, 885–893 (http://www.iap.tu-darmstadt.de/tqp/uebungen/qinfo11/Gleason.pdf).

Heisenberg W., *Fizyka* a *filozofia*, tłum. z ang. S. Amsterdamski, Książka i Wiedza, Warszawa 1965.

James W., *The Principles of Psychology*, Henry Holt and Company, New York 1890.

Kolmogorov A., *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York 1933.

Łukasik A., *Umysł* a *mechanika kwantowa*. O *zastosowaniu formalizmu przestrzeni Hilberta do modelowania procesów poznawczych*, w: *Poszukiwania filozoficzne. I. Nauka. Prawda*, red. J. Michalczenia, J. Mizińska, K. Ossowska, Instytut Filozofii UW-M, Olsztyn 2014, 199–217.

Neumann J. von, *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Princeton University Press, Princeton 1932.

Neumann J. von, Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, New Jersey 1944.

Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B., *Psychologia poznawcza*, WN PWN, Warszawa 2013.

Przewodnik po kognitywistyce, red. J. Brehmer, Wydawnictwo WAM, Kraków 2016.

Tversky A., Kahneman D., *Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjuctive Fallacy in Probability Judgement*, Psychological Review 90(1984)4, 293–315.
Tversky A., Kahneman D., *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases*, Science 185(1974), 1124–1131.
Tversky A., Kahneman D., *Osądy* w *warunkach niepewności: heurystyki* i *błędy poznawcze*, w: D. Kahneman, *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim* i *wolnym*, tłum. z ang. P. Szymczak, Media Rodzina, Poznań 2013, 559–580.
Wang Z., Busemeyer J.R., *A Quantum Ouestion Order Model Suported by Empirical Tests of an* A *Priori and Precise Prediction*, Topics in Cognitive Science 5(2013)4, 689–710.
Wang Z., Busemeyer J.R., Atmanspacher H., Potos E.M., *The Potential of Using Quantum Theory to Build Models of Cognition*, Topics in Cognitive Sciences 5(2013)4, 672–710.

QUANTUM MODELS OF COGNITION AND DECISION-MAKING

Abstract. Quantum mechanics introduces a new set of revolutionary principles, such as wave-particle duality, superposition, uncertainty, complementarity, entanglement, as well as a fundamentally new approach to probability. Quantum mechanics was created to explain some paradoxical discoveries that were impossible to understand using classical physics. Nowadays we have a similar problem in cognition and decision making – there are many paradoxical findings that seem irrational according to classical probability theory. For example, under some conditions, people judge the probability of event *A* and *B* to be greater that the probability of *A*, which is called the conjunction fallacy; or they judge the probability of *A* or *B* to be less than the probability of *A*, which is called the disjunction fallacy.

The aim of this article is to describe the Quantum Cognition research program, which applies the abstract, mathematical formalism of quantum mechanics to cognition and decision making. Quantum probability theory, initially invented to explain some effects on measurements in physics, appears to be a powerful tool to explain some findings in the cognitive sciences.

Keywords: quantum mechanics, quantum cognition, decision theory, quantum probability

ANDRZEJ ŁUKASIK
lukasik@bacon.umcs.lublin.pl
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Instytut Filozofii
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 4, 20–031 Lublin

DOI: 10.21697/spch.2016.52.4.15