Zeszyty Prawnicze
UKSW 6.1 (2006)

PIOTR GAWRYSIAK

Politechnika Warszawska

RACHUNKI I LICZBY STAROŻYTNYCH GREKÓW I RZYMIAN

I. WPROWADZENIE

Wynalezienie pisma i liczb to jedne z największych osiągnięć ludzkości. Należy oczywiście pamiętać, iż istniały zaawansowane cywilizacje, jak choćby cywilizacja Inków, które nie znały pisma, jednak zwykle i one posiadły przynajmniej umiejętność zapisywania liczb[1]. Spostrzeżenie to pokazuje, iż umiejętność pisania nie jest tożsama z umiejętnością prowadzenia pisanych rachunków pomimo, iż często jest za taką uznawana. Obie techniki wydają się w istocie być od siebie niezależne i tylko stosunkowo późnemu wynalezieniu oznaczeń liczbowych w większości kultur przypisać należy to, iż jest tak bardzo zintegrowane ze „zwykłym" pismem. Wynalezienie pisma przypisuje się powszechnie Fenicjanom, choć dotyczy to w zasadzie jedynie systemu alfabetycznego, jaki przejęli od nich starożytni Grecy i jakim, ze zmianami, posługujemy się dziś. Samo pismo ma natomiast historię znacznie starszą, której nie warto tu przytaczać, jako że była przedmiotem niezliczonych już badań i publikacji[2].

---

[1] Por. H. J. SPINDEN, *Ancient Civilizations of Mexico and Central Mexico*, Toronto 1999, s. 121.

[2] Por. np. F. COULMAS, *Blackwell Encyclopedia of Writing Systems*, Oxford 1999, s. 556 i n.; S. R. FISHER, *History of Writing*, Suffolk 2004.

Warto natomiast zauważyć, iż potrzeba wynalezienia zarówno pisma, jak też i oznaczeń liczbowych, związana jest ściśle z ograniczeniami ludzkiej pamięci. Doskonale rozumiał to Platon, który w swoich *Dialogach* wkłada w usta Sokratesa słowa krytyki sztuki pisania, obawiając się, iż jej rozpowszechnienie spowoduje utratę przez ludzi umiejętności zapamiętywania[3]. Istotnie, w kulturach, w których pismo było szerzej nieznane, większość ludzi potrafiła zapamiętywać niewyobrażalne dla nas ilości informacji, takich jak choćby całe poematy – choć oczywiście nie bez użycia mnemotechniki[4]. Uzasadnione może być zatem także przypuszczenie, iż umiejętności rachunkowe ludzi z tychże kultur, w szczególności zaś umiejętność liczenia w pamięci, były nieporównywalnie bardziej rozwinięte niż ludzi współczesnych.

Oczywiście zapisywanie liczb rzadko bywało celem samym w sobie, a służyło głównie bądź to celom archiwalnym, bądź też było pomocą w obliczeniach. Do tego drugiego celu stworzono wiele metod i narzędzi, które nie tylko ułatwiały sam proces obliczeniowy, ale także mogły służyć jako podręczna forma „pamięci", szczególnie istotna dla osób niepiśmiennych.

II. LICZENIE NA PALCACH

Jak łatwo się domyśleć, najstarszym przyrządem obliczeniowym była ludzka dłoń, instrument, który każdy z nas posiada zawsze przy sobie. Prosty sposób liczenia na palcach – taki, w którym każdy palec odpowiada jednostce – jest jednak bardzo ograniczony, pozwala bowiem jedynie na przeprowadzenie operacji dodawania i odejmowania w zakresie 10-ciu – chyba, że użyjemy także palców stóp. Jeśli zatem zachodzi potrzeba przedstawienia przy użyciu palców większych liczb, należy posłużyć się bardziej skomplikowanym systemem.

---

[3] Por. Plat., *Pheidr. 274b-278b.*

[4] Por. E. MINCHIN, *Homer and the Resources of Memory: Some Applications of Cognitive Theory to the Iliad and the Odyssey*, Oxford 2001.

Wzmianki świadczące o istnieniu takiego systemu odnaleźć można w dziełach zarówno autorów greckich jak i rzymskich[5]. Można przypuszczać, iż powszechny system reprezentacji liczb przy użyciu palców mógł być instrumentem niezwykle przydatnym w handlu, pozwalał bowiem prowadzić negocjacje handlowe nawet osobom nieznającym wspólnego języka. Niestety, brak źródeł, które pozwalałyby stwierdzić, jak wyglądało ułożenie palców służące do reprezentacji poszczególnych liczb. Jest to o tyle zrozumiałe, iż większość autorów traktuje znajomość tego systemu jako coś oczywistego. Na przykład w jednej z satyr Juwenalisa[6] odnajdujemy następujące zdanie:

Szczęśliwy [Nestor], który setkę przekroczywszy liczy już swoje lata na prawej ręce[7].

W pismach mówcy rzymskiego Kwintyliana[8] umiejętność liczenia na palcach traktowana jest jako rzecz oczywista. Niestety, i tutaj nie znajdujemy żadnych informacji pozwalających określić jakie gesty należało wykonać.

Nieco bardziej dokładny opis zawdzięczamy świętemu Hieronimowi. W *adversus Jovinianum* pisze on[9]:

Dziewictwo jest tym dla małżeństwa czym owoc jest dla drzewa, lub też nasienie dla kłosu. Pomimo że sto, sześćdziesiąt i trzydzieści pochodzą z tej samej ziemi i z tego samego siewu, jest wielka różnica w odniesieniu do liczby. Trzydzieści oznacza małżeństwo. Już sam sposób, w jaki palce są połączone – spójrz jak wydają się obejmować, czule całować

---

[5] Por. M. WILLIAMS, *History of Computing Technology,* Los Alamitos 1997, s. 48.

[6] Por. Iuv., *sat.* 10,245: ... *qui tot per saecula mortem / Distulit atque suos iam dextra computat annos* ...

[7] Wszystkie tłumaczenia tekstów P. G.

[8] Quint., *inst. orat.* 11,3,86. Por też J. RICHARDSON, *Digital Reckoning among the Ancients*, «American Mathematical Monthly» 23 (1916), s. 7-13.

[9] Hieron., *adv. Jov.* 1,4.

i przysięgać wierność – obraz męża i żony. Sześćdziesiąt odnosi się do wdów, ponieważ znajdują się one w sytuacji trudnej i nieszczęśliwej. Stąd górny palec oznacza ich przygnębienie, zaś im większa trudność w wyrzekaniu się przyjemności kiedyś odczuwanych, tym większa nagroda. Wreszcie (słuchaj uważnie, czytelniku) aby pokazać sto, używana jest prawa ręka zamiast lewej: kółko jest tworzone przez te same palce, które na prawej ręce oznaczały wdowieństwo i tym samym przedstawiona zostaje korona dziewictwa.

Brak dokładnych opisów owego systemu nie pozwala oczywiście na twierdzenie, iż pozostawał on taki od czasów starożytnych aż do średniowiecza. Niemniej jednak jest to wysoce prawdopodobne. Jedno z pierwszych przedstawień układu palców do pokazywania liczb znajdziemy w traktacie dotyczącym obliczeń dat ważnych świąt chrześcijańskich, *De temporum ratione*, spisanym około 725 roku przez angielskiego mnicha Bede[10]. Układ ten jest praktycznie identyczny z tym, który został przedstawiony w wydanym w Wenecji w 1494 podręczniku arytmetyki Paciollego (znanego szerzej głównie z wynalezienia podwójnego księgowania), *Suma de Arithmetica Geometria*[11]. Co ciekawe, układy dla pojedynczych liczb są takie same, jak te uwidocznione na żetonach oddawanych podatnikom przez rzymskich poborców podatkowych w I wieku n.e.

Wydaje się także, iż system ten rozpowszechniony był zarówno w ówczesnym świecie chrześcijańskim, jak i arabskim. We wczesnośredniowiecznych tekstach arabskich odnaleźć można wiele zagadkowych zdań, zawierających liczby, które stają się zrozumiałe dopiero po „podstawieniu" w miejsce tych liczb symboli odpowiadających opisanym powyżej układom palców, lub też wprost odnoszących się do owych układów palców. Dobrym przykładem jest tu je-

---

[10] Por. BEDA VENERABILIS, *De temporum ratione, Capitulum I, De computo vel loquela digitorum*, [w:] C. JONES, *Venerabilis Bedae, Opera Didascalica*, Turnholti 1975.

[11] Por. M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 49.

den z poematów Anwariego[12] opiewający mądrość wezyra Nizama al-Muk słowami:

Zginałeś palce lewej dłoni w wieku, gdy dzieci ssą [jeszcze] duży palec.

Innymi słowy, wezyr ów potrafił już w dzieciństwie liczyć powyżej 100. Niespójność z przytoczonym powyżej tekstem św. Hieronima wynika zaś z tego, iż system stosowany na bliskim wschodzie był lustrzanym odbiciem tego, będącego w użyciu w Europie. O ile w krajach chrześcijańskich rozpoczynano liczenie od lewej ręki, to w świecie arabskim – od prawej.

System ów, rozprzestrzeniony zapewne wśród często kontaktujących się ze sobą narodów Europy i Bliskiego Wschodu, nie był znany w krajach azjatyckich. Stosowany tam sposób liczenia na palcach, spotykany jeszcze i dzisiaj między innymi w Chinach i Indiach, wymagał użycia dwóch dłoni. Palcami jednej z nich dotykano zgięć drugiej, którym przypisano odpowiednie wartości liczbowe, przy czym – podobnie jak to ma miejsce w klasycznym zapisie pozycyjnym – każdy palec posiadał inną „wagę". W ten sposób możliwe było przedstawienie liczb aż do 9999 (lub więcej, gdy posłużyć się także kciukiem)[13].

Kończąc rozważania dotyczące liczenia na palcach, warto nadmienić, iż stanowiły one nie tylko „przyrząd" służący komunikowaniu wartości liczbowych w sposób niewerbalny. Pozwalając utrwalić, choćby tylko na chwilę, liczbę, ułatwiały obliczenia. Co więcej – ponieważ aż do czasów nowożytnych umiejętność wykonywania działań arytmetycznych innych niż dodawanie (w szczególności umiejętność mnożenia) nie była rozpowszechniona, toteż znane były różne metody zaprzęgnięcia palców do ułatwienia przeprowadzenia tej czynności. Większość z nich zakłada, iż osobie liczącej znana jest tabliczka mnożenia do 25-ciu (tj. do wartości 5 zarówno mnożnika jak i mnożnej).

---

[12] Por. G. IFRAH, *Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku*, tłum. S. HARTMAN, Wrocław 1990, s. 70.

[13] Por. M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 53.

III. ABAK I LICZYDŁA

Gwałtowne rozpowszechnienie elektronicznych przyrządów obliczeniowych spowodowało, iż liczydła są obecnie przedmiotem niemalże zapomnianym. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku innego, powszechnie używanego przyrządu obliczeniowego, suwaka logarytmicznego, straciły rację bytu w niezwykle krótkim czasie. Jeszcze w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku można było spotkać je w użyciu w krajach wschodnioeuropejskich, szczególnie zaś w ówczesnym Związku Radzieckim. Nauka posługiwania się liczydłami była elementem programu pierwszych klas szkoły podstawowej w Polsce. Dziś zaś większości młodych osób słowo „liczydło" nie kojarzy się z żadnym przedmiotem codziennego użytku, podczas gdy jeszcze ich dziadkowie posługiwali się nim dla przeprowadzenia codziennych rachunków.

O ile jednak kariera suwaka logarytmicznego była stosunkowo krótka[14], o tyle liczydło, wraz z jego bezpośrednim przodkiem – abakiem (opisanym poniżej) pozostaje najdłużej wykorzystywanym instrumentem służącym do liczenia w historii. Początków używania abaku nie daje się obecnie już prześledzić, wiadomo, iż w starożytnej Grecji był przedmiotem codziennego użytku. Co więcej, podobnie jak to miało miejsce z opisaną powyżej techniką liczenia na palcach, abak najprawdopodobniej traktowany był jako przedmiot na tyle „oczywisty", że do dzisiejszych czasów zachowało się niezwykle mało przekazów, pozwalających zrekonstruować jego wygląd i sposób użycia. W źródłach pisanych odnajdujemy jedynie lakoniczne stwierdzenia, potwierdzające wykorzystanie abaków w dokonywaniu obliczeń. Dla przykładu w mowach Demostenesa[15] odnaleźć można wzmiankę o potrzebie wykorzystania kamyczków[16], do prze-

[14] Pierwszy opublikowany opis suwaka logarytmicznego zawarty jest on w wydanej w 1630 roku książce *Grammelogia*, autorstwa Richarda Delamain'a; por. także K. HILL, *'Juglers or Schollers?': negotiating the role of a mathematical practitioner*, «The British Journal for the History of Science» 31 (1998), s. 253.

[15] Dem., *pro cor.* 227.

[16] Por. M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 55.

prowadzenia tych obliczeń, które są zbyt skomplikowane, by można było je wykonać w pamięci. Herodot[17] pisząc z kolei o Egipcjanach[18], zauważa, iż w odróżnieniu od Greków piszą i rachują przy użyciu małych kamieni od prawej do lewej strony, nie zaś od lewej do prawej. Przedstawienia osób dokonujących obliczeń przy użyciu abaku odnaleźć można również na greckich wazach. Są to jednak rysunki zbyt małe i niedokładne (jak na przykład przedstawienie rachmistrza na „wazie Dariusza"[19]) by można było na ich podstawie określić szczegółowy sposób wykorzystania tego przyrządu.

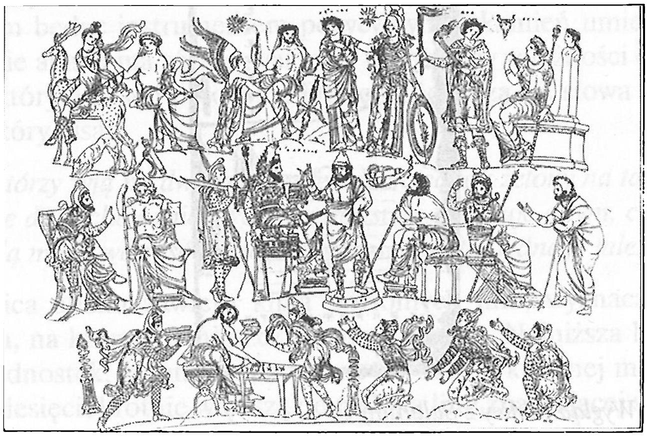

Fig. 1 *Rozwinięcie rysunku z wazy Dariusza, mężczyzna dokonujący rachunków widoczny jest w ostatnim, dolnym rzędzie*[20].

O ile jednak sposób używania abaku pozostaje w sferze domysłów, to już nie ma wątpliwości co do samego jego wyglądu, a to za sprawą znalezisk archeologicznych. Jednym z najstarszych odnale-

[17] Herod. 2,36.

[18] Por. T. HEATH, *History of Greek Mathematics*, Oxford 1921, s. 48.

[19] Por. D. E. SMITH, *History of Mathematics*, New York 1958, s. 161.

[20] Rycina za *http://www.iranian.com/Pictory/2004/July/war.html*, stan na 1 listopada 2005.

zionych abaków, jest tzw. „tablica z Salaminy", odnaleziona w 1899 roku na greckiej wyspie Salaminie[21]. Była ona używana najprawdopodobniej w jakiejś instytucji publicznej, z racji swoich dużych rozmiarów, dla których zresztą początkowo uważana była za planszę do gry nie zaś przyrząd rachunkowy.

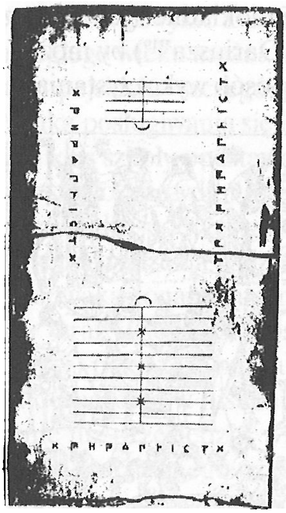

Fig. 2 Wygląd tablicy z Salaminy[22]

Jej wygląd odpowiada dość dobrze przedstawieniom abaka z późniejszych już, średniowiecznych traktatów. Można zatem założyć, iż sposób użycia był podobny do tego, który opisano np. w książce Roberta Recorde, której pierwsze wydanie pochodzi z 1542 r.[23], zaś która drukowana bez praktycznie żadnych zmian i wykorzystywana w nauczaniu była aż do XVIII wieku. Pokazuje

[21] Por. S. CUOMO, *Ancient Mathematics*, Routledge 2001, s. 11 i n.

[22] Rycina za *www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/history.html*, stan na 1 listopada 2005.

[23] R. RECORDE, *The Grounde of Artes, teachings the Worke and Practise, of Arithmeticke, both in whole numbers and fractions,* London 1542.

to, że abak był już w tym okresie przyrządem „ustandaryzowanym", którego wygląd i sposób użycia praktycznie się nie zmieniał.

Abak jest rozwinięciem najbardziej prymitywnej techniki liczenia, polegającej na usypywania kupek kamieni (czy też innych przedmiotów takich jak muszelki, żetony itp.) równolicznych do przeliczanego zbioru. Technika ta, choć używana od wieków, choćby do przeliczania liczby wojska, które poległo w bitwach (Ifrah jako przykład podaje choćby początek filmu Iwan Groźny w reżyserii Eisensteina[24]) jest oczywiście zbyt prymitywna do prowadzenia efektywnych obliczeń na większych liczbach. Abak rozwiązuje ten problem będąc instrumentem pozycyjnym – kamień umieszczony na płycie abaku ma różną „wartość" liczbową w zależności od miejsca w którym został położony. Do tego odnoszą się słowa Polibiusza[25], który pisał:

> *Ci, którzy żyją na dworach królewskich, są jak żetony na tabliczce do rachowania. Wola rachmistrza decyduje o tym, czy będą miały wartość jednego chalkosa, czy też jednego talentu.*

Tablica abaku zawiera kilka poziomych linii, wyznaczających miejsca, na których umieszczać należy żetony. Najniższa linia jest linią jednostek, żetony umieszczone na każdej kolejnej mają wartość dziesięciokrotnie większą od tych na linii znajdującej się poniżej. Żetony można kłaść także pomiędzy liniami – mają wtedy wartość pięciokrotnie większą od tych, umieszczonych na sąsiadującej dolnej linii. Na każdej linii może znajdować się nie więcej niż cztery żetony, i nie więcej niż jeden pomiędzy liniami – gdy tylko pojawiła się potrzeba dołożenia piątego żetonu na linię, wszystkie znajdujące się na niej żetony usuwano i zastępowano jednym, położonym w pustym miejscu powyżej, analogicznie postępowano w przypadku dokładania drugiego żetonu w przestrzeni pomiędzy liniami. Jak widać w ten sposób bardzo prosto można było przeprowadzić dodawanie dwóch liczb, odejmowanie było nieco bardziej

[24] Por. G. IFRAH, *op. cit.*, s. 87.

[25] Polyb. 5,26. Por. też T. HEATH, *History of Greek Mathematics*, cit., s. 48.

utrudnione, lecz wciąż znacznie wygodniejsze niż dokonywane w pamięci. Operacje mnożenia i dzielenia są już znacznie bardziej skomplikowane i wymagają zastosowania technik podziału na pół i podwojenia liczb.

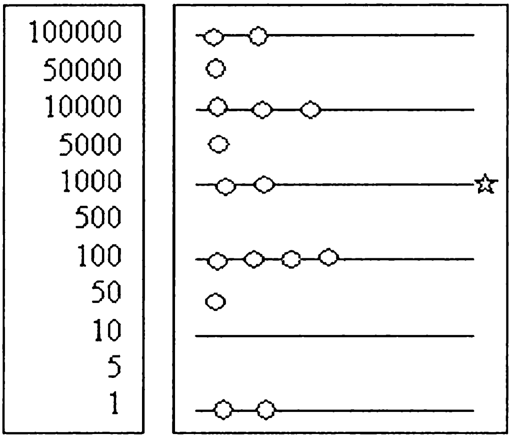

Fig 3. Wygląd tablicy abaku przedstawiającej liczbę 287452.

Samo słowo *żeton* którym tu się posłużono jest zapożyczeniem z francuskiego słowa *jeton*, którego etymologię wywieść można od czasownika *jeter*, rzucać. Wprawny rachmistrz (w języku łacińskim *calculator*) umieszczał żetony na powierzchni abaku wyrzucając je z ręki, co przyspieszało obliczenia. Wygląd samych żetonów jest dobrze znany, wykonywane zwykle z metalu przetrwały w dużej ilości do czasów współczesnych. Nie bez znaczenia jest tu fakt, iż zwykle osoba posługująca się abakiem miała przynajmniej jeden zestaw takich żetonów, liczba żetonów będących „w obiegu" mogła łatwo równać się liczbie monet. Gdy wziąć dodatkowo pod uwagę rozpowszechniony w średniowiecznej Europie zwyczaj obdarowywania osób wykształconych nowym zestawem żetonów z okazji rozpoczęcia nowego roku, łatwo zrozumieć opisane przez Williamsa[26] doko-

[26] M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 53.

nanie Barnarda, który pisząc dzieło *The Casting Counter and the Counting Board* osobiście ponoć obejrzał ponad sto tysięcy różnych żetonów.

Abak pozostawił wiele trwałych śladów w językach europejskich. Przede wszystkim same angielskie słowa *calculus* i *calculate*, czy też polskie *kalkulować* zdają się pochodzić od łacińskiego *calculus* oznaczającego mały kamyczek – właśnie taki, jaki używany był jako żeton w liczeniu na abaku. Z kolei pochodzenie angielskiego słowa *counter* (lada sklepowa) można wywieść z tego, iż używany był on nie tylko jako miejsce, na którym wykładano sprzedawane towary, ale także w charakterze abaku, dokonując na nim obliczenia należnej zapłaty. Wreszcie, wspomnianemu powyżej sposobowi rzucania żetonów na powierzchnię abaku zawdzięczamy angielskie wyrażenia *cast a horoscope*, *cast a spell* czy też wreszcie *cast up an account*.

Samo słowo *abak* najczęściej wiązane jest z semickim słowem *abaq* oznaczającym kurz. Można przypuszczać, iż rozwinięta forma abaku, w postaci marmurowej lub drewnianej tabliczki z wyrytymi liniami, jest ulepszeniem kawałka stołu, który posypywano piaskiem, by rysować w nim linie i oznaczać liczby przy użyciu małych kamieni. Słowo *abaq* przyjęło w języku greckim formę *abax* «wpis po grecku» oznaczającą już (w jednym ze znaczeń) płytę pokrytą piaskiem, w łacinie zaś przekształcone zostało w *abacus.*

Nowoczesną – jeśli można użyć tu tego określenia – postacią abaku są liczydła, mające tę przewagę nad marmurową nawet płytą, iż przypadkowe ich potrącenie nie powoduje zniszczenia zapisu, zaś ponieważ żetony przymocowane są na stałe do liczydła, potrzeba znacznie mniejszej wprawy w szybkim ich ustawianiu na odpowiednich pozycjach. Instrument, który można nazwać protoplastą liczydeł, był z pewnością używany w starożytnym Rzymie[27], jako swego rodzaju kieszonkowy abak, wydaje się jednak, iż nigdy nie zdobył wielkiej popularności.

---

[27] Por. D. SMELTZER, *Man and number*, Mineola 2003, s. 66.

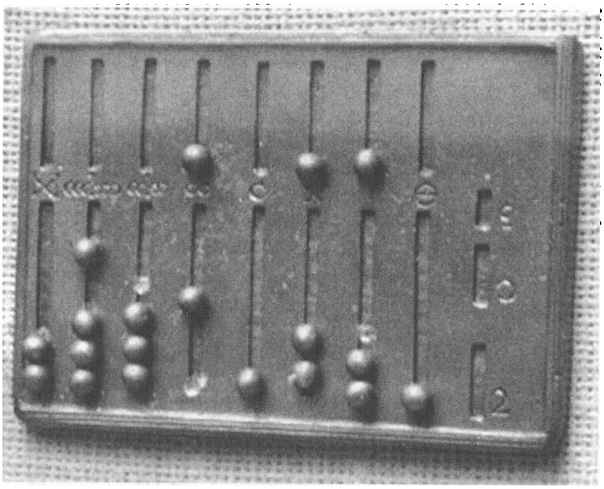

Fig 4. Rekonstrukcja rzymskiego abaku kieszonkowego z RGZ Museum w Mainz, wg oryginału przechowywanego w Bibliothèque nationale de France w Paryżu[28]

IV. GRECKIE LICZBY

Systemy zapisu liczb można zgrubsza podzielić na te, w których stosowane jest oznaczenie addytywne (będące wynikiem sumy składników) i te, w których zastosowanie ma oznaczenie pozycyjne. W pierwszym znaki pisarskie przedstawiające cyfry systemu posiadają ustaloną wartość liczbową, która nie zależy od ich położenia w ramach pojedynczej cyfry, natomiast w drugim pozycja może modyfikować wartość pojedynczego znaku.

Oznaczenie addytywne używane było przez starożytnych Greków, skąd pewne elementy systemu zostały zapożyczone przez Rzymian. Niestety, nie zachowały się praktycznie żadne dokumenty, które pozwalałyby odtworzyć szczegóły metod rachunkowych stosowanych przez Greków. Powtarza się tu znów sytuacja, wzmiankowana już przy opisie abaku – autorzy starożytni opisujący greckie

[28] Rycina za *http://en.wikipedia.org/wiki/Image:RomanAbacusRecon.jpg*, stan z 1 listopada 2005, licencja GFDL.

osiągnięcia matematyczne skupiali się na bardziej zaawansowanych problemach związanych z teorią liczb i geometrią, pomijając, oczywiste i banalne dla nich, kwestie prostego rachunku. Sytuację pogarsza tu dodatkowo fakt, iż w użyciu były dwa systemy oznaczeń[29], z których to jeden, to drugi zyskiwał popularność na obszarze półwyspu. Pierwszy, zwany attyckim lub herodiańskim (najwcześniejszy jego opis znajdujemy w manuskrypcie *de notis numerorum*[30] datowanym na II n.e., przypisywanym gramatykowi Aeliusowi Herodianusowi[31]), jest modyfikacją systemu mykeńskiego, który był systemem addytywnym o bazie 10[32]. Grecy dodali do znaków mykeńskich dodatkowe oznaczenia nie odpowiadające potęgom 10, mianowicie 5 oraz 50, 500, 5000 i 50000, które powstały poprzez połączenie znaku piątki z odpowiednim znakiem mnożnika. Pewne wzmianki dotyczące znaczenia liczby pięć, jak np. użycie jej w dziełach Homera[33] w znaczeniu „liczyć", oznaczać może, iż powyższa modyfikacja mogła być wynikiem adaptacji jakiegoś starszego jeszcze systemu oznaczenia liczbowego, opartego właśnie o bazę pięć.

Znaki podstawowe to:

I	Γ lub Π	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10000

Warto zauważyć, iż znaki te odpowiadają pierwszym literom greckich nazw odpowiednich liczebników dla 1, 5, 10, 100, 1000, 10000. I tak znak oznaczający 1 (I) to pierwsza litera słowa *jota*; znak oznaczający 5 (Γ – dawna forma litery Pi lub Π) to pierwsza litera słowa *penta*; znak oznaczający dziesięć (Δ) to pierwsza litera

[29] Por. T. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics*, Mineola 2003, s. 14.

[30] Por. *Appendix ad Stephani*, [w:] *Thesaurus Lingua Graecae*, VIII, ed. F. DIDOT, szp. 345 i n.

[31] Por. H. SCHULTZ, s. v. *Herodianus* 4, «RE» 5.1 (1913), szp. 972; M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 27.

[32] Por. G. IFRAH, *op. cit.*, s. 138.

[33] Por. np. Hom., Il. 8,374; 10,317; 18,481; 23,833.

słowa *deca*, itd. Aby zapisując większe liczby nie powtarzać zbyt wiele razy pojedynczych znaków tworzono dodatkowe znaki dla 50, 500, 5000 i 50000 poprzez połączenie znaku oznaczającego 5 (czyli Γ) i odpowiedniego znaku podstawowego (a mianowicie Δ, H, X, M) – wpisując ten drugi „pod daszkiem" litery Γ. W ten sposób dowolna liczba, nie większa niż 50000, zawiera w tym systemie nie więcej niż cztery powtórzenia każdego ze znaków.

Przykład łączenia znaków:

	5 x 10 = 50		5 x 1000 = 5000

System herodiański wynaleziony został najprawdopodobniej w Atenach i stąd też największą popularnością wśród innych państw-miast półwyspu cieszył się w czasach największej potęgi ateńskiej. Drugi z systemów, który określić można mianem alfabetycznego, pojawił się na obszarze Azji Mniejszej około VIII w. p.n.e. i stamtąd stopniowo rozprzestrzenił się na obszar całego półwyspu, wypierając system herodiański z użycia około I wieku. W systemie tym, także addytywnym, poszczególnym literom alfabetu greckiego przypisano wartości liczbowe.

A	=	1	I	=	10	P	=	100
B	=	2	K	=	20	Σ	=	200
Γ	=	3	Λ	=	30	T	=	300
Δ	=	4	M	=	40	Υ	=	400
E	=	5	N	=	50	Φ	=	500
ς	=	6	Ξ	=	60	X	=	600
Z	=	7	O	=	70	ψ	=	700
H	=	8	Π	=	80	Ω	=	800
Θ	=	9	ϙ	=	90	ϡ	=	900

Fig. 5. Wartości liczbowe liter alfabetu greckiego[34]

[34] Por. H. L. RESNIKOFF, R. O. WELLS, *Mathematics in Civilization*, Mineola 1985, s. 24; M. WILLIAMS, *op. cit.*, s. 16; M. AUERBACH, M. GOLAS, *Gramatyka grecka*, oprac. J. REZLER, Warszawa 2000, s. 110 i n.

System afabetyczny pozwalał zapisywać liczby przy wykorzystaniu znacznie mniejszej liczby znaków, co najprawdopodobniej było jednym z powodów jego popularności. Pozwalał bowiem na umieszczenie liczb na monetach[35], na których zapis heriodiański po prostu się nie mieścił. Pierwszymi oficjalnymi przedmiotami, na których widnieje liczba zapisana w tym systemie, a które zachowały się po dziś są zresztą monety Ptolomeusza II[36].

Oszczędność zapisu wiązała się jednak z bardzo dużą uciążliwością w prowadzeniu rachunków. System alfabetyczny wymagał bowiem zapamiętania znaczenia znacznie większej liczby znaków i większej liczby kombinacji tych znaków niż herodiański. Jest zatem bardzo prawdopodobne, iż w codziennej praktyce handlowej był wspomagany jakimś innym systemem liczbowym, dopiero zaś ostateczne wyniki obliczeń zapisywano w oznaczeniu alfabetycznym, lub też w niektórych wypadkach w ogóle z niej rezygnowano. Dobrym przykładem może być tu *Almagest* Ptolomeusza, dzieło greckie, w którym używany jest babiloński system o bazie 60 – zapewne dlatego, iż Ptolemeusz posługiwał się nim na co dzień.

V. RZYMSKIE LICZBY

Rzymskie oznaczenie liczb, w swojej pierwotnej formie (przed wprowadzeniem znaków IV na oznaczenie liczby 4 i IX dla 9) jest właśnie systemem addytywnym, o bazie równej 5. Zaznaczyć tu warto, iż pomimo, iż cyfry rzymskie mają obecnie formę tożsamą z wielkimi literami alfabetu łacińskiego (I, V, X, L, C, D, M), to jednak ich rodowód jest zupełnie odmienny i wywodzi się od oznaczenia etruskiego[37].

Systemy addytywne, takie jak oznaczenie rzymskie, uważane są zwykle za bardziej prymitywne od pozycyjnych i szczególnie uciążli-

[35] Por. O. MORKHOLM, *Early Hellenistic Coinage from the Accession of Alexander to the Peace of Apamea*, Cambridge 1991, s. 143.

[36] Np. tetradrachma Ptolomeusza II z 253 r p.n.e., Svoronos 830, SNGCop. 458.

[37] Por. G. IFRAH, *op. cit.*, s. 140 i n.

we w rachunkach. Pomimo to proste obliczenia można przy ich wykorzystaniu wykonać dość sprawnie, posługując się jedynie kartką papieru. Szczególnie prostą operacją jest dodawanie, które wymaga jedynie zebrania symboli pochodzących z obu dodawanych liczb i ew. dokonanie zamiany tych, których liczba przekracza bazę systemu.

Przykład dodawania dwóch liczb w oznaczeniu rzymskim:
2417 = MM CCCC X VII
+676 = D CLXX V I
3093 = MMDCCCCCLXXXVVIII = MMMLXXXXIII

Mnożenie i dzielenie jest oczywiście operacją nieco trudniejszą i wymaga zastosowania podwajania (w przypadku mnożenia) lub też przepoławiania (dla dzielenia).

Przykład mnożenia w systemie rzymskim:
25x13 = XXV x XIII = 325
XXV x I = XXV
XXV x I = XXV
XXV x I = XXV
XXV x X = CCL

CCLXXXXXXVVV = CCLLXXV = CCCXXV

Dopiero wprowadzenie wspomnianych już elementów odejmowania do reprezentacji liczb (takich jak oznaczenie IV=V-I) powoduje, iż operacje arytmetyczne stają się bardzo uciążliwe. Ten system oznaczeń jest jednak wynalazkiem stosunkowo późnym, pierwsze przykłady jego wykorzystania pochodzą dopiero z ok. 130 n.e., a prawdziwą popularność uzyskał dopiero w XVII wieku, gdy liczby rzymskie straciły już praktyczne znaczenie.

VI. ZAKOŃCZENIE

Oznaczenie liczbowe, którym się posługujemy obecnie jest na tyle wygodne, iż łatwo zapominamy, że jest wynalazkiem, z którego dobrodziejstw korzystać możemy dopiero od niedawna. Jego dostępność – i powszechna znajomość – ma niebagatelny wpływ na rozwój nauki, a także kultury. To, iż nie był znany Grekom czy Rzymianom, a zatem, że wykonywanie prostych nawet dla nas rachunków mogło być czynnością uciążliwą i czasochłonną, miało z pewnością niemałe kulturowe znaczenie.

ANCIENT GREEK AND ROMAN NUMERICAL NOTATION AND COUNTING AIDS

Summary

The abilities to count and write down numbers are usually regarded as trivial, while in fact these skills are early technologies that significantly influenced the development of science, trade, culture and law. The lack of understanding of the way in which numerical information was conveyed among people and the ways in which daily computations – such as taxes, livestock accounts, prices etc. – were carried out, might lead to improper reasoning about the culture itself. It is, therefore, useful to know the basics of „daily" mathematics used by Greeks and Romans while studying – for example – Roman law.

In this paper some basic information regarding the numerical notation used in ancient Greece and Rome is presented. This includes Roman numerals with examples of mathematical operations performed with their aid and two Greek numerical systems, namely herodianic and attic. Early aids to computation are also discussed, including finger reckoning and the abacus.